1.6.5 Mocniny s celým mocnitelem I

Předpoklady:

Pedagogická poznámka: Nečekám, až bude mít celá třída oba první příklady. Poté, co většina pomalejších dokáže dopočítat první příklad, jdeme na příklad 3.

Př. 1: Vypočti $\left(\frac{4x^2y^3}{2xy^2}\right)^3\cdot\frac{8\left(3xy^2\right)^3}{\left(2xy^3\right)^2}$. Dodržuj KISS.

$$\left(\frac{4x^2y^3}{2xy^2}\right)^3\cdot\frac{8\left(3xy^2\right)^3}{\left(2xy^3\right)^2}=\left(2xy\right)^3\cdot\frac{2^3\cdot3^3x^3y^6}{2^2x^2y^6}=2^3x^3y^3\cdot2\cdot3^3x=2^4\cdot3^3x^4y^3$$

Př. 2: Vyjádři pomocí mocnin prvočísel výraz $\left(\frac{15^2\cdot6^2\cdot8}{10\cdot4^2}\right)^3:\left(\frac{4^3\cdot9^2}{12^3\cdot6}\right)^2$. Dodržuj KISS.

$$\left(\frac{15^2\cdot6^2\cdot8}{10\cdot4^2}\right)^3:\left(\frac{4^3\cdot9^2}{12^3\cdot6}\right)^2=\left(\frac{[3\cdot5]^2\cdot[2\cdot3]^2\cdot2^3}{2\cdot5\cdot\left[2^2\right]^2}\right)^3:\left(\frac{\left[2^2\right]^3\cdot\left[3^2\right]^2}{\left[2^2\cdot3\right]^3\cdot2\cdot3}\right)^2=$$

$$=\left(\frac{3^2\cdot5^2\cdot2^2\cdot3^2\cdot2^3}{2\cdot5\cdot2^4}\right)^3:\left(\frac{2^6\cdot3^4}{2^6\cdot3^3\cdot2\cdot3}\right)^2=\left(3^4\cdot5\right)^3:\left(\frac{1}{2}\right)^2=3^{12}\cdot5^3\cdot2^2$$

Př. 3: Které z následujících dvou pravidel je matematicky hezčí?

a) Pro každé $a\in R$ a $r,s\in N$ platí: $a^r\cdot a^s=a^{r+s}$.

b) Pro každé $a\in R$, $a\neq0$ a $r,s\in N$, $r>s$ platí: $\frac{a^r}{a^s}=a^{r-s}$.

Základní požadavek na krásu matematického pravidla: Musí být co nejobecnější s minimem výjimek $\Rightarrow$ pravidlo pro podíl mocnin moc krásy nepobralo: $\frac{a^r}{a^s}=a^{r-s}$, platí když $r>s$ (ošklivá podmínka).

Použití pravidla pro podíl je jasné, například: $\frac{a^5}{a^3}=a^{5-3}=a^2$. Nemohli bychom ho upravit tak, aby fungovalo vždy a podmínku jsme mohli vypustit?
Zkusíme, co se děje, když podmínka $r\le s$ neplatí.

Zkusíme $r=s$**.**

Podle pravidla:

Podle významu mocniny

$\frac{a^r}{a^r} = a^{r-r} = a^0$.

$\frac{a^r}{a_r} = \frac{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)} = 1$ všechno se pokrátí, nahoře i dole je *a* r-krát.

Pokud má být matematika bezesporná, musíme oběma způsoby získat stejný výsledek $\Rightarrow$ platí: $a^0 = 1$.

Není to úplně nerozumné, mocnitel říká, kolikrát se *a* opakuje v součinu, když je mocnitel 0, nebude *a* v součinu ani jednou a zůstane tam pouze jednička (kterou můžeme připsat do jakéhokoliv součinu, aniž by ho změnila).

Zatím to vypadá, že platí: $\frac{a^r}{a^r} = a^{r-r} = a^0 = 1$.

Zkusíme $r < s$ (konkrétní hodnoty).

Podle pravidla:

$$\frac{a^3}{a^7} = a^{3-7} = a^{-4}$$

Podle významu mocniny

$$\frac{a^3}{a^7} = \frac{a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a} = \frac{1}{a \cdot a \cdot a \cdot a} = \frac{1}{a^4}$$

Pokud má být matematika bezesporná, musíme oběma způsoby získat stejný výsledek $\Rightarrow$ platí: $a^{-4} = \frac{1}{a^4}$.

Opět je to docela rozumné, mocnitel říká, kolikrát se *a* opakuje v součinu. Když mocnitel zmenšujeme, ubývá *a* v součinu (je to stejné jako bychom počet *a* v součinu neměnili, ale součin zapsali do zlomku, ve kterém budeme postupně přidávat *a* do jmenovatele). Pokud bude mocnitel menší než nula, musí v být součinu *a* méně než žádné $\Rightarrow$ *a* se objeví ve jmenovateli.

Zkusíme $r < s$ (obecně).

Podle pravidla:

$$\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s} \quad (r - s < 0 \text{ -záporné číslo})$$

Podle významu mocniny

$$\frac{a^r}{a^s} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot a \ldots a}^{r \cdot krát}}{\underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots a}_{s \cdot krát}} = \frac{1}{\underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots a}_{s-r \cdot krát}} = \frac{1}{a^{s-r}}$$

($s - r > 0$, kladné číslo, opačné k $r - s$)

Získali jsme stejný výsledek jako před chvíli: musí platit $a^{r-s} = \frac{1}{a^{s-r}} = \frac{1}{a^{-(r-s)}}$

Závěr: Vzorec $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$ můžeme používat vždy (tedy bez podmínky), pokud zavedeme $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$ (obecně $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$, $a \neq 0$).

Pro všechna $a \in R$, $a \neq 0$ platí $a^0 = 1$.

Pro každé $a \in R$, $a \neq 0$ a pro každé $m \in N$ platí: $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ (např. $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$).

Pedagogická poznámka: Doporučuji žákům, aby si význam záporného exponentu raději pamatovali na konkrétním příkladu $a^{-2}=\frac{1}{a^2}$ než na obecném vzorci $a^{-m}=\frac{1}{a^m}$, ze kterého nejsou znaménka bez předchozí podmínky zcela zřejmá).

Př. 4: Vyjádři jako zlomek.

a) a^{-2} b) 10^{-2} c) 3^{-1} d) 2^{-4}

a) $a^{-2}=\frac{1}{a^2}$ b) $10^{-2}=\frac{1}{10^2}=0,01$

c) $3^{-1}=\frac{1}{3^1}=\frac{1}{3}$ d) $2^{-4}=\frac{1}{2^4}=\frac{1}{16}$

Př. 5: Odstraň mocninu.

a) 2^{-2} b) $(-2)^{-2}$ c) $(-2)^{-3}$ d) 2^{-3} e) $\left(\sqrt{2}\right)^{-4}$

a) $2^{-2}=\frac{1}{4}$ b) $(-2)^{-2}=\frac{1}{(-2)^2}=\frac{1}{4}$

c) $(-2)^{-3}=\frac{1}{(-2)^3}=\frac{1}{-8}=-\frac{1}{8}$ d) $2^{-3}=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$

e) $\left(\sqrt{2}\right)^{-4}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4=\frac{1}{\left(\left(\sqrt{2}\right)^2\right)^2}=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}$ nebo jinak $\left(\sqrt{2}\right)^{-4}=\frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^4}=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}$

$\Rightarrow$ **Záporné znaménko v exponentu neovlivňuje znaménko mocniny, o znaménku rozhoduje znaménko základu mocniny a sudost nebo lichost exponentu.**

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad je důležitý, část studentů pravidelně považuje záporné mocniny za záporná čísla. Podle definice je to zjevný nesmysl, ale oni neuvažují podle definic a pravidel.

Př. 6: Zapiš jako mocninu prvočísla.

a) 49 b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{27}$ d) $\frac{1}{32}$

a) $49=7^2$ b) $\frac{1}{4}=\frac{1}{2^2}=2^{-2}$

c) $\frac{1}{27}=\frac{1}{3^3}=3^{-3}$ d) $\frac{1}{32}=\frac{1}{2^5}=2^{-5}$

Všechny vzorce pro mocniny s přirozeným mocnitelem platí i pro celočíselné mocnitele.

Př. 7: Vynechej v sešitě řádku a pak sepiš z paměti bez obracení stránek v sešitu všechny vzorce pro výpočty s mocninami. Jak si vzorce lépe zapamatovat?

$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$

$\left(a^r\right)^s = a^{r \cdot s}$

$a^r : a^s = a^{r-s}$

$\left(a \cdot b\right)^r = a^r \cdot b^r$

$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$

Lépe se pamatují věci, které spolu souvisí, nebo souvisí s něčím, co už známe.
Máme dvě dvojice vzorců:

- pro násobení a dělení: $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$ a $a^r : a^s = a^{r-s}$ (v každém vzorci vystupuje dvojice svázaných operací: násobení se sčítáním, dělení s odčítáním).
- pro odstranění závorky při násobení a dělení: $\left(a \cdot b\right)^r = a^r \cdot b^r$ a $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$.

Dosud jsme u uvedených vzorců předpokládali, že exponenty mohou být pouze přirozená čísla. Úvaha z úvodu dnešní hodiny nám umožňuje pracovat v exponentu i se zápornými čísly $\Rightarrow$ všechny vzorce platí pro celá (tedy i záporná) čísla v exponentu.

Pro každá dvě reálná čísla *a*, *b* **a pro každá dvě celá čísla** *r*, *s* **(tudíž i záporná) platí:**

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$$

$$\left(a^r\right)^s = a^{r \cdot s}$$

Je-li $a \neq 0$**, pak** $a^r : a^s = a^{r-s}$

$$\left(a \cdot b\right)^r = a^r \cdot b^r$$

Je-li $b \neq 0$**, pak** $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$

Př. 8: Vyjádři co nejjednodušeji jako kladnou mocninu čísla většího než jedna.

a) $0{,}5^{-5}$ b) $0{,}02^{-3}$ c) $0{,}04^{-2}$

a) $0{,}5^{-5} = \left(\frac{5}{10}\right)^{-5} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-5} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^5} = 2^5$

b) $0{,}02^{-3} = \left(\frac{2}{100}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{1}{50}\right)^3} = \frac{1}{\frac{1^3}{50^3}} = \frac{\frac{1}{1}}{\frac{1}{50^3}} = 50^3$

c) $0,04^{-2}=\dfrac{1}{0,04^2}=\dfrac{1}{\left(\dfrac{4}{100}\right)^2}=\dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{25}\right)^2}=\dfrac{1}{\dfrac{1^2}{25^2}}=\dfrac{\dfrac{1}{1}}{\dfrac{1}{25^2}}=25^2$

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad (pro většinu studentů je těžké pochopit zadání) je vyrovnávací, většině třídy jenom ukážu bod a) a pokud není dost času, jdeme rovnou na příklad 7.

Pedagogická poznámka: Ještě než pustíte žáky na následující příklad, musíte spočítat na tabuli pár ukázek, ve kterých použijete záporný exponent. V opačném případě žáci budou při výpočtech záporné exponenty obcházet, čímž jejich zavedení ztrácí své kouzlo.

Záporné exponenty můžeme ve výpočtech používat naprosto stejně jako přirozené.

- $2^{-3}\cdot 2^5=2^{-3+5}=2^2$
- $\left(a^2\right)^{-3}=a^{2\cdot(-3)}=a^6$
- $\dfrac{3^{-1}\cdot 3^4}{3^2\cdot 3^{-1}}=3^{-1+4-2-(-1)}=3^2=9$

Př. 9: Zjednoduš a výsledek zapiš tak, aby se v něm nevyskytovala záporná mocnina.

a) $3^{-15}\cdot 3^{23}$ b) $\left(2^7\right)^{-3}$ c) $\dfrac{4^8}{4^{-12}}$ d) $(2x)^{-4}$ e) $\dfrac{2^{-6}}{2^5}$

f) $\dfrac{a^{-3}\cdot a^6}{a^5\cdot a^{-4}}$ g) $\left(\dfrac{2}{a^3}\right)^{-2}\cdot\dfrac{\left(a^{-2}\right)^3}{(2a)^2}$ h) $\dfrac{2}{a^3}\cdot\left(\dfrac{1}{a^2}\right)^2\cdot\left(\dfrac{2}{a^3}\right)^{-3}$

a) $3^{-15}\cdot 3^{23}=3^{-15+23}=3^8$

b) $\left(2^7\right)^{-3}=2^{7\cdot(-3)}=2^{-21}=\dfrac{1}{2^{21}}$

c) $\dfrac{4^8}{4^{-12}}=4^{8-(-12)}=4^{8+12}=4^{20}$

d) $(2x)^{-4}=2^{-4}\cdot x^{-4}=\dfrac{1}{16x^4}$

e) $\dfrac{2^{-6}}{2^5}=2^{-6-5}=2^{-11}=\dfrac{1}{2^{11}}$

f) $\dfrac{a^{-3}\cdot a^6}{a^5\cdot a^{-4}}=a^{-3+6-5-(-4)}=a^2$

g) $\left(\dfrac{2}{a^3}\right)^{-2}\cdot\dfrac{\left(a^{-2}\right)^3}{(2a)^2}=\dfrac{2^{-2}}{a^{-6}}\cdot\dfrac{a^{-6}}{2^2a^2}=2^{-2-2}\cdot a^{-6-(-6)-2}=2^{-4}a^{-2}=\dfrac{1}{2^4a^2}$

h) $\dfrac{2}{a^3}\cdot\left(\dfrac{1}{a^2}\right)^2\cdot\left(\dfrac{2}{a^3}\right)^{-3}=\dfrac{2}{a^3}\cdot\dfrac{1}{a^4}\cdot\dfrac{2^{-3}}{a^{-9}}=\dfrac{2^{1-3}}{a^{3+4-9}}=\dfrac{2^{-2}}{a^{-2}}=\dfrac{a^2}{2^2}$

Př. 10: Zjednoduš a výsledek zapiš tak, aby se v něm nevyskytovala záporná mocnina.

a) $\left(\frac{a^{-2}}{b^3}\right)^{-2}$ b) $\left(\frac{a^2}{b^3}\right)^{-2}\cdot\frac{\left(a^{-2}\cdot b\right)^3}{\left(ab\right)^{-2}}$ c) $\left(a^2b\right)^{-2}\cdot\left(a^{-3}\right)^{-2}\cdot b^4b^{-3}$

a) $\left(\frac{a^{-2}}{b^3}\right)^{-2}=\frac{a^4}{b^{-6}}=a^4b^6$

b) $\left(\frac{a^2}{b^3}\right)^{-2}\cdot\frac{\left(a^{-2}\cdot b\right)^3}{\left(ab\right)^{-2}}=\frac{a^{-4}}{b^{-6}}\cdot\frac{a^{-6}\cdot b^3}{a^{-2}b^{-2}}=\frac{a^{-10}\cdot b^3}{a^{-2}b^{-8}}=a^{-8}b^{11}=\frac{b^{11}}{a^8}$

c) $\left(a^2b\right)^{-2}\cdot\left(a^{-3}\right)^{-2}\cdot b^4b^{-3}=a^{-4}b^{-2}\cdot a^6\cdot b=a^2b^{-1}=\frac{a^2}{b}$

Pedagogická poznámka: Náplní zbytku hodiny je samostatné počítání příkladů ze sbírky nebo z Petákové.

Př. 11: Sbírka příklad 9
Sbírka příklad 8 a) b) c) d) e)

Př. 12: Petáková:
strana 62/cvičení 37 b) f)
strana 62/cvičení 39 b) d) e) f)
strana 62/cvičení 40
strana 62/cvičení 42 a) b) d) e) g)

Shrnutí: Lépe a obecněji se nám počítá, když zavedeme, že platí $a^{-2}=\frac{1}{a^2}$.